Posloupnosti funkcí

Definice 1 (bodová a stejnoměrná konvergence)**.** *Pro posloupnost reálných funkcí* $\{f_n\}$ *definovaných na* $A \subset \mathbb{R}^d$ *a* $f : A \to \mathbb{R}$ *říkáme, že*

- *posloupnost* $\{f_n\}$ ***konverguje bodově*** *k funkci* f *na množině* A *(značíme* $f_n \to f$*), pokud pro všechna* $x \in A$ *platí* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*,*
- *posloupnost* $\{f_n\}$ ***konverguje stejnoměrně*** *k funkci* f *na množině* A *(značíme* $f_n \rightrightarrows f$*), pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists N \in \mathbb{N} \,\forall x \in A \,\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- *posloupnost* $\{f_n\}$ ***konverguje lokálně stejnoměrně*** *k funkci* f *na množině* A *(značíme* $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$*), pokud* $f_n \rightrightarrows f$ *na* K *pro každou* $K \subseteq A$ *kompaktní.*

Poznámky a příklady. *1. Bodovou konvergenci můžeme rovněž vyjádřit následujícím výrokem:*

$$\forall x \in A \,\forall \varepsilon > 0 \,\exists N \in \mathbb{N} \,\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

oproti stejnoměrné konvergenci jsme prohodili pořadí kvantifikátorů.

2. Kažadá stejnoměrně konvergentní posloupnost konverguje i bodově, obráceně to ovšem neplatí, stačí uvážit příklad $A = [-1, 1]$, $f_n(x) = x^n$*.*

3. Stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce.

4. Pro $f_n \in C([a, b])$ *a obvyklou maximovou normu* $||g|| = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$ *na* $C([a, b])$ *platí*

$$(f_n \rightrightarrows f) \iff (||f_n - f|| \to 0)\,.$$

5. Pro stejnoměrnou konvergenci můžeme rovněž formulovat Bolzano-Cauchyovu podmínku, platí

$$(f_n \rightrightarrows f) \iff (\forall \varepsilon > 0 \,\exists N \in \mathbb{N} \,\forall x \in A \,\forall m, n \in \mathbb{N},\, m, n \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)\,.$$

6. Analogicky k posloupnostem definujeme i bodovou a stejnoměrnou konvergenci řad funkcí. Označíme-li $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$*, pak říkáme, že řada* $\sum_{k=1}^{\infty}$ *konverguje bodově. resp. stejnomětně k funkci (součtu)* $s : A \to \mathbb{R}$*, pokud* $s_n \to s$*, resp.* $s_n \rightrightarrows s$*.*

Věta 2 (Dini)**.** *Nechť* $\{f_n\} \subset C([a, b])$*,* $f \in C([a, b])$ *a nechť dále platí*

- $f_n \to f$*,*
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$*,* $x \in [a, b]$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Potom $f_n \rightrightarrows f$*.*